Aufgabenblatt 11

Teil A

11 Aufgabenblatt 11: Analysis und Induktion

11.1 Aufgabe 1

$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow V = \pi \cdot \left| \int_0^5 (x^2 - 2x)^2 dx \right| = \pi \cdot \left| \int_0^5 x^4 - 4x^3 + 4x^2 dx \right|$$
$$= \frac{500}{3}\pi \qquad (VE)$$

11.2 Aufgabe 2

Schnittpunkte: $\frac{1}{2}x^3 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 2$

$$\Rightarrow V = \pi \cdot \left| \int_0^2 (\frac{1}{2}x^3 + 1)^2 - (x^2 + 1)^2 dx \right| = \pi \cdot \left| \int_0^2 \frac{1}{4}x^6 - x^4 + x^3 - 2x^2 dx \right|$$
$$= \frac{332}{105}\pi \qquad (VE)$$

11.3 Aufgabe 3

Die Funktion ist streng monoton steigen auf ganz $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ es existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

Umbenennen der Variabeln: $x = 2(y+1)^3 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{2}} - 1$

$$\Rightarrow V = \pi \cdot \left| \int_2^{16} (\sqrt[3]{\frac{x}{2}} - 1)^2 dx \right| = \pi \cdot \left| \int_0^5 \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 dx \right|$$
$$= \pi \cdot \left| \frac{6}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{3}} - 3\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + dx \right|_2^{16} = 6,2\pi \qquad (VE)$$

11.4 Aufgabe 4

a) $f(12) = a \cdot \sqrt{12} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b)

$$V = \pi \cdot \left| \int_0^{12} \left(\frac{1}{2}\sqrt{3x}\right)^2 dx \right| = \pi \cdot \left| \int_0^{12} \frac{3}{4} x dx \right| = 54\pi \qquad (VE)$$

c)

$$\frac{1}{8} = \pi \cdot \left| \int_0^h \frac{3}{4} x dx \right|$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{8\pi} = \frac{3}{8}h^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad h^2 = \frac{1}{3\pi}$$
$$\Rightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \approx 0,33 \qquad (LE)$$

Die negative Lösung hat keine physikalische Bedeutung!

Teil B

Aufgabe 1 :

a) z.z. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) : \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$

Schritt 1: Induktionsverankerung:

$A(1) : 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$

Schritt 2: Schluss von n auf n+1:

Induktionsannahme: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei A(n) eine wahre Aussage, d.h. es gelte $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$

Induktionsbehauptung: Dann ist auch A(n+1) eine wahre Aussage, d.h. nachzuweisen ist $\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 + \sum_{i=n+1}^{n+1} 2i - 1 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + 2n + 1$$
$$\overset{\text{I.-A.}}{=} n^2 + 2n + 1$$

$$A(n) \to A(n+1)$$

Aus Schritt 1 und 2 folgt die Behauptung

b) z.z. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Schritt 1: Induktionsverankerung:

$A(1) : \frac{1}{(2-1) \cdot (2+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$

Schritt 2: Schluss von n auf n+1:

Induktionsannahme: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei A(n) eine wahre

Aussage, d.h. es gelte $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Induktionsbehauptung: Dann ist auch A(n+1) eine wahre Aussage,
d.h. nachzuweisen ist $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n+1}{2n+3}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&\overset{\text{I.-A.}}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(n) \to A(n+1)$$

Aus Schritt 1 und 2 folgt die Behauptung

c) z.z. für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (x+2-n) \cdot e^{-x}$

Schritt 1: Induktionsverankerung:

$f^{(0)}(x) = (-1)^{-1}(x+2-0) \cdot e^{-x} = -(x+2) \cdot e^{-x}$

Schritt 2: Schluss von n auf n+1:

Induktionsannahme: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gelte
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (x+2-n) \cdot e^{-x}$

Induktionsbehauptung: Dann gelte das auch für n+1,
d.h. nachzuweisen ist $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n} \cdot (x+1-n) \cdot e^{-x}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{\text{I.-A.}}{=} \left((-1)^{n-1} \cdot (x+2-n) \cdot e^{-x}\right)' \\
&= (-1)^{n-1} \cdot \left[e^{-x} - (x+2-n)e^{-x}\right] \\
&= (-1)(-1)^{n-1} \cdot (x+2-n-1) \cdot e^{-x} \\
&= (-1)^{n} \cdot (x+1-n) \cdot e^{-x}
\end{aligned}$$

Aus Schritt 1 und 2 folgt die Behauptung