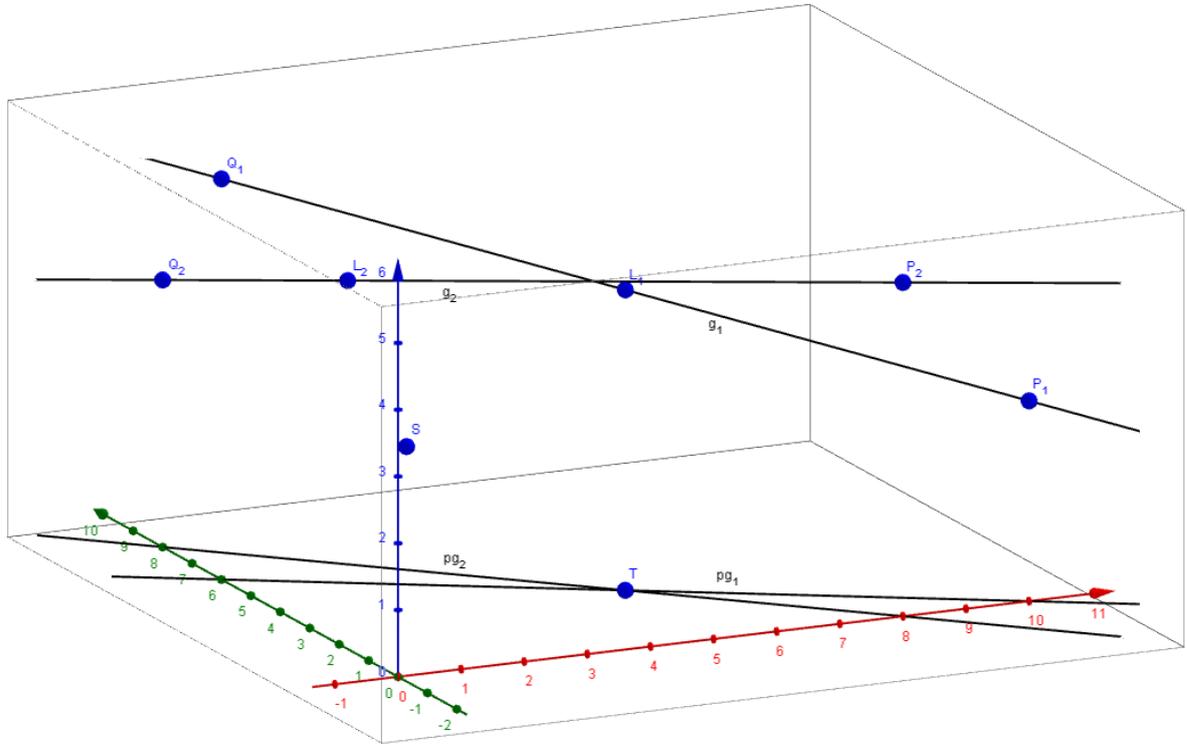


# Lösungen zu Aufgabenblatt 15: Vektorrechnung

1.) Aufgabe:

Lösungsskizze:



Lösung zu Teil a):

Gegeben sind die Punkte  $P_1 = (10|0|3)$  und  $Q_1 = (0|6|6)$ , daraus ergibt sich:

$$g_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 0-10 \\ 6-0 \\ 6-3 \end{pmatrix}, \lambda \in |R \Leftrightarrow g_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in |R$$

Gegeben sind die Punkte  $P_2 = (8|0|5)$  und  $Q_2 = (0|8|4)$ , daraus ergibt sich:

$$g_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0-8 \\ 8-0 \\ 4-5 \end{pmatrix}, \mu \in |R \Leftrightarrow g_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in |R$$

### Lösung zu Teil b):

Die Stromschienen berühren sich nicht, das heißt sie sind entweder echt parallel oder windschief.

1. Schritt: Wir prüfen, ob  $g_1$  und  $g_2$  parallel sind:

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 24 \\ -24 - 10 \\ -80 + 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -34 \\ -32 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Geraden nicht parallel.

2. Schritt: Wir prüfen, ob  $g_1$  und  $g_2$  windschief sind, dazu setzen wir die beiden Geradengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten 3 Gleichungen:

$$(1) 10 - 10 * \lambda = 8 - 8\mu$$

$$(2) 6 * \lambda = 8 * \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4} * \lambda$$

$$(3) 3 + 3 * \lambda = 5 - \mu$$

Nun setzen wir  $\mu = \frac{3}{4} * \lambda$  in ein der anderen Gleichungen ein:

$$(3) 3 + 3 * \lambda = 5 - \frac{3}{4} * \lambda \Leftrightarrow 3 * \lambda = 2 - \frac{3}{4} * \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{15}$$

Nun setzen wir  $\lambda = \frac{8}{15}$  in eine der anderen Gleichungen ein:

$$(2) \mu = \frac{3}{4} * \frac{8}{15} = \frac{2}{5}$$

Nun prüfen wir alle 3 Gleichungen mit  $\lambda = \frac{8}{15}$  und  $\mu = \frac{2}{5}$  auf ihre Richtigkeit:

$$(1) 10 - 10 * \frac{8}{15} \neq 8 - 8 * \frac{2}{5}$$

Wir haben bereits jetzt gezeigt, dass diese Bedingung nicht erfüllt wird. Damit müssen die Stromschienen windschief sein.

### Lösung zu Teil c):

Gegeben ist die Gerade  $g_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$  und der Punkt  $L_1 = (5|3|4,5)$ .

Durch Einsetzen des Punktes in die Gerade prüfen wir, ob der Punkt auf der Gerade liegt, dazu rechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich 3 Gleichungen:

$$(1) 5 = 10 - 10 * \lambda$$

$$(2) 3 = 6 * \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$(3) 4,5 = 3 + 3 * \lambda$$

Nun prüfen wir die übrigen Gleichungen mit  $\lambda = \frac{1}{2}$  auf ihre Richtigkeit:

$$(1) 5 = 10 - 10 * \frac{1}{2} \text{ wahr}$$

$$(3) 4,5 = 3 + 3 * \frac{1}{2} \text{ wahr}$$

Damit liegt  $L_1$  auf  $g_1$ .

Gegeben ist die Gerade  $g_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$  und der Punkt  $L_2 = (2|6|4,25)$ .

Durch Einsetzen des Punktes in die Gerade prüfen wir, ob der Punkt auf der Geraden liegt. Dazu rechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich 3 Gleichungen:

$$(1) 2 = 8 - 8 * \mu$$

$$(2) 6 = 8 * \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4}$$

$$(3) 4,25 = 5 - \mu$$

Nun prüfen wir die übrigen Gleichungen mit  $\mu = \frac{3}{4}$  auf ihre Richtigkeit:

$$(1) 2 = 8 - 8 * \frac{3}{4} \text{ wahr}$$

$$(3) 4,25 = 5 - \frac{3}{4} \text{ wahr}$$

Damit liegt  $L_2$  auf  $g_2$ .

Nun müssen wir noch den Abstand der beiden Punkte berechnen:

$$L_1 = (5|3|4,5); L_2 = (2|6|4,25)$$

Dann folgt daraus:  $d = \sqrt{(2-5)^2 + (6-3)^2 + (4,25-4,5)^2}$

$$= \sqrt{\frac{289}{16}} = \frac{17}{4} = 4,24, \text{ also } 4,25\text{m}$$

Der Abstand der beiden Lampen zueinander beträgt 4,25m.

### Lösung zu Teil d):

Gegeben ist der höchste Punkt der Skulptur  $S = (2|4|2,25)$  und die Lampe

$$L_1 = (5|3|4,5).$$

1. Schritt: Damit die Skulpturenspitze noch auf den Fußboden des Raumes

( $x_1 - x_2$ -Ebene) fällt, müssen wir zunächst einmal eine Gerade finden, die durch die beiden gegebenen Punkte verläuft, dazu rechnen wir:

$$h_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 2-5 \\ 4-3 \\ 2,25-4,5 \end{pmatrix}, \lambda \in |R \Leftrightarrow h_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2,25 \end{pmatrix}, \lambda \in |R$$

2. Schritt: Da der Schatten der Skulpturenspitze in der  $x_1 - x_2$ -Ebene liegen soll, muss dieser Schattenpunkt folgende Koordinaten besitzen:

$$E_1 = (x_1|x_2|0) \text{ mit } x_1, x_2 \in |R_0^+$$

3. Schritt: Nun überprüfen wir, ob die Gerade  $h_1$  die  $x_1 - x_2$ -Ebene in einem solchen Punkt  $E_1$  schneidet. Dazu setzen wir den Punkt in die Geradengleichung ein und bestimmen so seine Koordinaten:

$$h_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2,25 \end{pmatrix}$$

Wie erhalten 3 Gleichungen:

$$(1) x_1 = 5 - 3 * \lambda$$

$$(2) x_2 = 3 + \lambda$$

$$(3) 0 = 4,5 - 2,25 * \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Nun setzen wir  $\lambda = 2$  in Gleichung (1) und (2) ein:

$$(1) x_1 = 5 - 3 * 2 \Leftrightarrow x_1 = -1$$

$$(2) x_2 = 3 + 2 = 6$$

Wenn die Gerade  $h_1$  die  $x_1 - x_2$ -Ebene schneiden soll, dann muss der Punkt  $E_1$  nach unserer Rechnung folgende Koordinaten haben:  $E_1 = (-1|6|0)$ . Da die  $x_1$ -Koordinate des Schnittpunktes negativ ist und damit nicht in unseren Definitionsbereich liegt, fällt der Schatten nicht mehr auf den Raumboden. Die Lampe  $L_1$  darf somit nicht eingeschaltet werden.

Gegeben ist der höchste Punkt der Skulptur  $S = (2|4|2,25)$  und die Lampe  $L_2 = (2|6|4,25)$ .

1. Schritt: Damit die Skulpturenspitze noch auf den Fußboden des Raumes

( $x_1 - x_2$ -Ebene) fällt, müssen wir zunächst einmal eine Gerade finden, die durch die beiden gegebenen Punkte verläuft, dazu rechnen wir:

$$h_2: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4,25 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-6 \\ 2,25-4,25 \end{pmatrix}, \mu \in |R \Leftrightarrow h_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4,25 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in |R$$

2. Schritt: Da der Schatten der Skulpturenspitze in der  $x_1 - x_2$ -Ebene liegen soll, muss dieser Schattenpunkt folgende Koordinaten besitzen:

$$E_2 = (x_1|x_2|0) \text{ mit } x_1, x_2 \in |R_0^+$$

3. Schritt: Nun überprüfen wir, ob die Gerade  $h_1$  die  $x_1 - x_2$ -Ebene in einem solchen Punkt  $E_1$  schneidet. Dazu setzen wir den Punkt in die Geradengleichung ein und bestimmen so seine Koordinaten:

$$h_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4,25 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wie erhalten 3 Gleichungen:

$$(1) x_1 = 2$$

$$(2) x_2 = 6 - 2 * \mu$$

$$(3) 0 = 4,25 - 2 * \mu \Leftrightarrow \mu = 2,125$$

Nun setzen wir  $\mu = 2,125$  in Gleichung (2) ein:

$$(2) x_2 = 6 - 2 * 2,125 = 1,75$$

Wenn die Gerade  $h_1$  die  $x_1 - x_2$ -Ebene schneiden soll, dann muss der Punkt  $E_1$  nach unserer Rechnung folgende Koordinaten haben:  $E_2 = (2|1,75|0)$ . Da die  $x_1 - x_2$ -Koordinaten des Schnittpunktes in unserem Definitionsbereich liegen, fällt der Schatten auf den Raumboden. Die Lampe  $L_2$  darf somit eingeschaltet werden.

Lösung zu Teil e):

Wir berücksichtigen den Hinweis und stellen dazu die vertikalen Projektionen der Schienen auf der  $x_1 - x_2$ -Ebene auf:

$$pg_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir den Schnittpunkt der Projektionsgeraden:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten 2 Gleichungen:

$$(1) 10 - 10 * \lambda = 8 - 8 * \mu$$

$$(2) 6 * \lambda = 8 * \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4} * \lambda$$

Wir setzen  $\mu = \frac{3}{4} * \lambda$  in Gleichung (1) ein:

$$(1) 10 - 10 * \lambda = 8 - 8 * \frac{3}{4} * \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Wir setzen  $\lambda = \frac{1}{2}$  in Gleichung (2) ein:

$$(2) \mu = \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Wir setzen nun  $\lambda$  in  $pg_1$  oder  $\mu$  in  $pg_2$  ein, um den Schnittpunkt der beiden Projektionsgerade zu erhalten:

$$pg_1: \vec{t}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt  $T = (5|3|0)$  ist der Schnittpunkt.

Nun müssen wir noch den Höhenunterschied zwischen den Projektionsgeraden betrachten, dazu bestimmen wir  $H_1$  und  $H_2$  von  $g_1$  und  $g_2$  über diesem Schnittbodenpunkt:

$$1) g_1: \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich 3 Gleichungen:

$$(1) 5 = 10 - 10 * \lambda$$

$$(2) 3 = 6 * \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$(3) H_1 = 3 + 3 * \lambda$$

Nun setzen wir  $\lambda = \frac{1}{2}$  in Gleichung (3) ein:

$$H_1 = 3 + 3 * \frac{1}{2} = 4,5$$

$$2) g_2: \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich 3 Gleichungen:

$$(1) 5 = 8 - 8 * \mu$$

$$(2) 3 = 8 * \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{8}$$

$$(3) H_2 = 5 - \mu$$

Nun setzen wir  $\mu = \frac{3}{8}$  in Gleichung (3) ein:

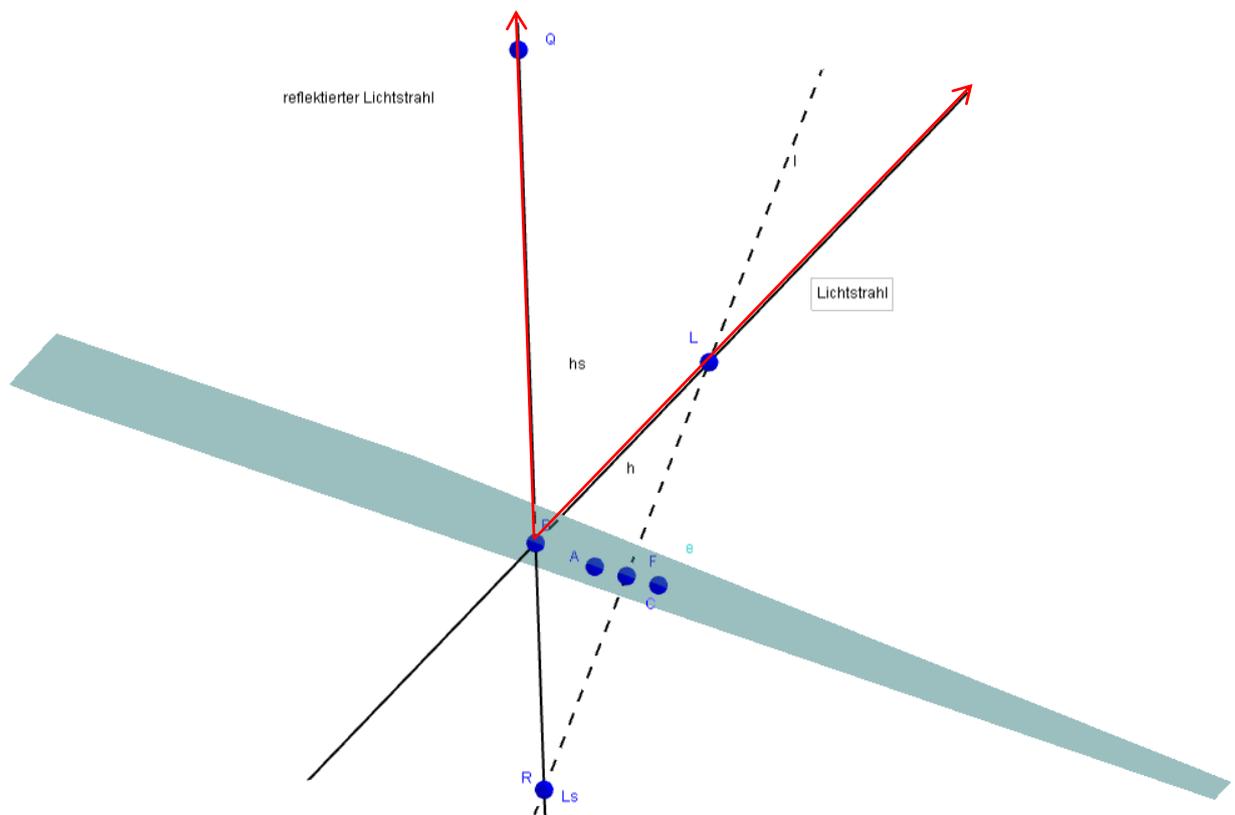
$$(3) H_2 = 5 - \frac{3}{8} = 4,625$$

Aus 1) und 2) folgt:

Also beträgt die Höhendifferenz über dem Punkt T nur  $H_1 - H_2 = 0,125m$ , so dass eine Lampe, die 0,2m tief von der Schiene 2 hängt die Schiene 1 dort berühren würde. Es ist also nicht möglich die Lampen auf diese Weise anzubringen.

2.) Aufgabe:

Lösungsskizze:



Gegeben sind die Punkte  $A = (4|3|0)$ ,  $B = (2|3|1)$ ,  $C = (6|0|1)$ ,  $L = (8|5.5|6.5)$ .

Lösung zu Teil a):

Zunächst stellen wir eine Ebenengleichung in allgemeiner Parameterform auf:

$$e: \vec{x}: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 2-4 \\ 3-3 \\ 1-0 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 6-4 \\ 0-3 \\ 1-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e: \vec{x}: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir formen die Ebenengleichung in Normalenform um:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow e: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Wir wandeln die Ebenengleichung in die Hesse'sche Normalenform um:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{61}, \quad \vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$e_{Hess}: \frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Nun setzen wir den Punkt  $L = (8|5.5|6.5)$  in die Hesse'sche Normalenform ein, um den Abstand zu berechnen:

$$\frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \begin{pmatrix} 8 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} = \sqrt{61} \approx 7,81$$

Lösung zu Teil b):

Wir betrachten den Punkt  $L = (8|5.5|6.5)$  und die Ebenengleichung

$$e: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Die Projektion des Punktes L in die Ebene e ist der Fußpunkt F des Lotes von L auf e. Die Berechnung von Lotfußpunkt F und Spiegelpunkt  $L_s$  können wir in folgenden Schritten berechnen:

1. Schritt: Wir bestimmen eine Gleichung der Lotgeraden l. Die Lotgerade besitzt den Punkt L als Aufpunkt und den Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene als Richtungsvektor.

Dann schreiben wir:

$$l: \vec{x}: \begin{pmatrix} 8 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Wir bestimmen F als Schnittpunkt der Ebene e mit der Lotgeraden. Dazu setzen wir die Lotgerade in die Ebenengleichung ein:

$$e: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow e: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[ \begin{pmatrix} 8 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 24 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Nun setzen wir  $\lambda = -1$  in die Lotgerade ein:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} + (-1) * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (5|1.5|0.5)$$

3. Schritt: Der Spiegelpunkt  $L_s$  errechnen wir mit Hilfe der Formel zur Punktspiegelung:

$$\vec{l} = 2 * \vec{f} - \vec{l} = 2 * \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2,5 \\ -5,5 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt  $L_s$  hat die Koordinaten  $L_s = (2|-2.5|-5.5)$ .

### Lösung zu Teil c):

Der Spiegelpunkt kennen wir bereits aus Lösung b). Da der Lichtstrahl als eine definierte Gerade  $h$  betrachtet werden kann, die durch die Punkte  $B$  (befindet sich auf der Ebene) und  $L$  verläuft, muss der reflektierte Lichtstrahl durch die Punkte  $L_s$  und  $B$  verlaufen. Dann gilt:

Lichtstrahl:

$$h: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 8-2 \\ 5,5-3 \\ 6,5-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow h: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 6 \\ 2,5 \\ 5,5 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda > 0$$

reflektierter Lichtstrahl

$$h_s: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3+2,5 \\ 1+5,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow h_s: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix}, \lambda_s > 0$$

Nun prüfen wir, ob die Punkte  $Q = (2|14|14)$  und  $R = (2|-2,5|-5,5)$  vom reflektierten Strahl getroffen werden, indem wir die Punkte in die reflektierte Geradengleichung einsetzen:

$$1) \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten 3 Gleichungen:

$$(1) 2 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} (2) 14 = 3 + 5,5 * \lambda_s \Leftrightarrow \lambda_s = 2 \\ (3) 14 = 1 + 6,5 * \lambda_s \Leftrightarrow \lambda_s = 2 \end{array} \right\} \lambda_s > 0 \Rightarrow Q \in h_s$$

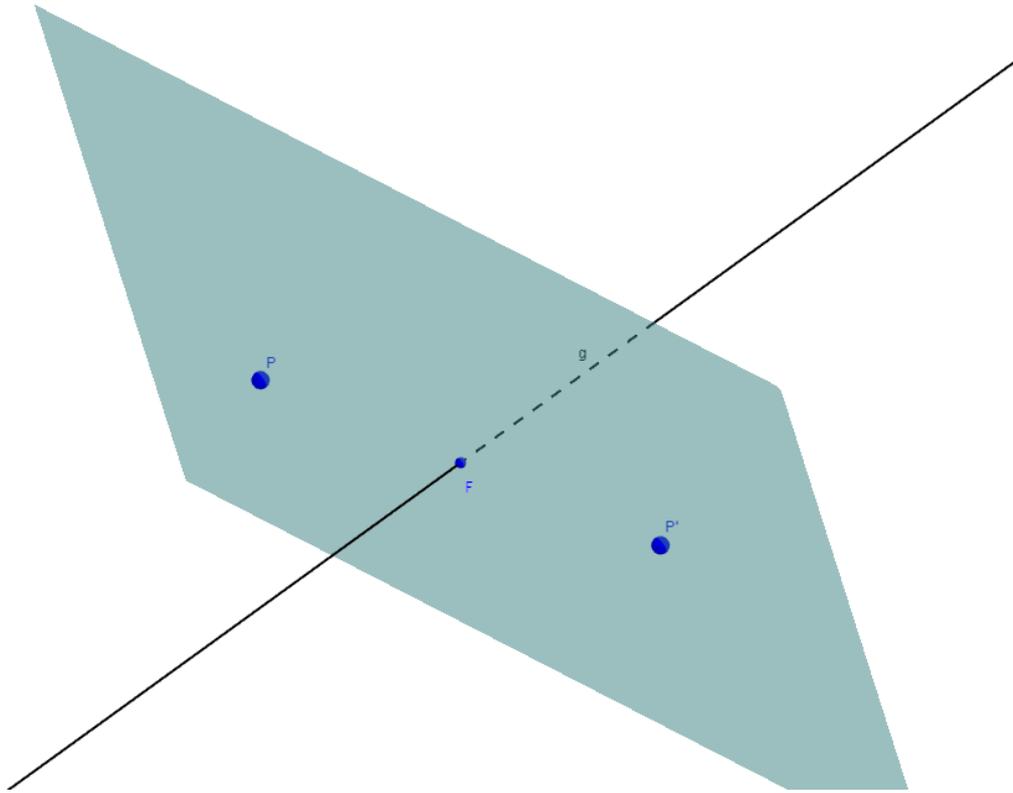
Der Punkt  $Q$  wird von dem reflektierten Strahl getroffen.

2) Wir könnten erneut das Lösungsverfahren aus 1) mit Punkt  $R$  durchführen, allerdings kann bereits aus einer geeigneten Skizze und vorherigen Lösungsschritten festgestellt werden, dass der Punkt  $R$  die gleichen Koordinaten besitzt wie der Spiegelpunkt  $L_s$ . Daraus können wir schließen, dass der Punkt  $R$  nicht auf dem reflektierten Strahl liegt.

### 3. Aufgabe:

Gegeben sind der Punkt  $P = (-4|1| - 3)$  und die Gerade  $g: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungsskizze:



Zunächst einmal stellen wir eine Hilfsebene e auf mit dem Punkt P als Aufpunkt und dem Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor:

$$e: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow e: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \vec{x} + 5 = 0$$

Nun berechnen wir den Fußpunkt F des Lotes von P auf g. Hierzu setzen wir unsere Geradengleichung in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + 5 = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{2}$$

Nun setzen wir  $\mu = -\frac{1}{2}$  in die Geradengleichung ein:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ -2,5 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (1,5|-2|-2,5)$$

Durch Punktspiegelung des Punktes P am Zentrum F erhalten wir den Punkt P'.

$$\vec{p}' = 2 * \vec{f} - \vec{p} = 2 * \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ -2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt P' lautet  $P' = (7|-5|-2)$ .

#### 4. Aufgabe:

Gegeben sind die Punkte  $A = (10|-1|2)$ ,  $B = (4|1|4)$  und die Ebene

$$e: x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$$

Zunächst einmal bestimmen wir eine Lotgerade mit A als Aufpunkt und den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor:

$$g: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir den Lotfußpunkt F, indem wir die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[ \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Nun setzen wir  $\lambda = -2$  in die Geradengleichung ein:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (8|-3|4)$$

Nun berechnen wir den Spiegelpunkt A':

$$\vec{a}' = 2 * \vec{f} - \vec{a} = 2 * \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir den reflektierten Strahl, indem wir eine Geradengleichung mit Hilfe der Punkte A' und B aufstellen:

$$g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 4-6 \\ 1+5 \\ 4-6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$