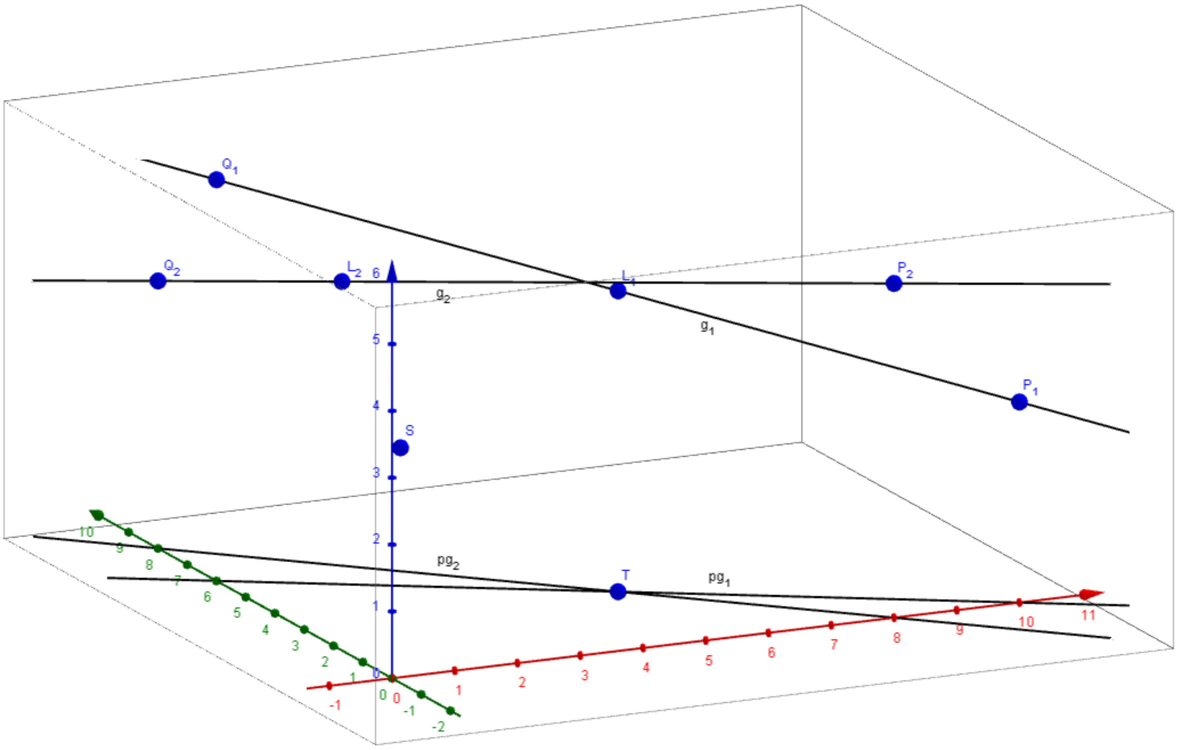
Lösungen zu Aufgabenblatt 15: Vektorrechnung

1.) Aufgabe:

Lösungsskizze:



Lösung zu Teil a):

Gegeben sind die Punkte $P_1 = (10|0|3)$ und $Q_1 = (0|6|6)$, daraus ergibt sich:

$$g_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 0-10 \\ 6-0 \\ 6-3 \end{pmatrix},\ \lambda \in |R \quad \Leftrightarrow g_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda \in |R$$

Gegeben sind die Punkte $P_2 = (8|0|5)$ und $Q_2 = (0|8|4)$, daraus ergibt sich:

$$g_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0-8 \\ 8-0 \\ 4-5 \end{pmatrix},\ \mu \in |R \quad \Leftrightarrow g_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mu \in |R$$

Lösung zu Teil b):

Die LED-Schienen berühren sich nicht, das heißt sie sind entweder echt parallel oder windschief.

1. Schritt: Wir prüfen, ob g_1 und $g_2$parallel sind:

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-24 \\ -24-10 \\ -80+48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -34 \\ -32 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Geraden nicht parallel.

2. Schritt: Wir prüfen, ob g_1 und g_2 windschief sind, dazu setzen wir die beiden Geradengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten 3 Gleichungen:

(1) $10 - 10 * \lambda = 8 - 8\mu$

(2) $6 * \lambda = 8 * \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4} * \lambda$

(3) $3 + 3 * \lambda = 5 - \mu$

Nun setzen wir $\mu = \frac{3}{4} * \lambda$ in ein der anderen Gleichungen ein:

(3) $3 + 3 * \lambda = 5 - \frac{3}{4} * \lambda \Leftrightarrow 3 * \lambda = 2 - \frac{3}{4} * \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{15}$

Nun setzen wir $\lambda = \frac{8}{15}$ in eine der anderen Gleichungen ein:

(2) $\mu = \frac{3}{4} * \frac{8}{15} = \frac{2}{5}$

Nun prüfen wir alle 3 Gleichungen mit $\lambda = \frac{8}{15}$ und $\mu = \frac{2}{5}$ auf ihre Richtigkeit:

(1) $10 - 10 * \frac{8}{15} \neq 8 - 8 * \frac{2}{5}$

Wir haben bereits jetzt gezeigt, dass diese Bedingung nicht erfüllt wird. Damit müssen die LED-Schienen windschief sein.

Lösung zu Teil c):

Gegeben ist die Gerade g_1: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und der Punkt $L_1 = (5|3|4{,}5)$.

Durch Einsetzen des Punktes in die Gerade prüfen wir, ob der Punkt auf der Gerade liegt, dazu rechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich 3 Gleichungen:

(1) $5 = 10 - 10 * \lambda$

(2) $3 = 6 * \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

(3) $4{,}5 = 3 + 3 * \lambda$

Nun prüfen wir die übrigen Gleichungen mit $\lambda = \frac{1}{2}$ auf ihre Richtigkeit:

(1) $5 = 10 - 10 * \frac{1}{2}\ wahr$

(3) $4{,}5 = 3 + 3 * \frac{1}{2}\ wahr$

Damit liegt L_1 auf g_1.

Gegeben ist die Gerade g_2: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $L_2 = (2|6|4{,}25)$.

Durch Einsetzen des Punktes in die Gerade prüfen wir, ob der Punkt auf der Geraden liegt. Dazu rechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich 3 Gleichungen:

(1) $2 = 8 - 8 * \mu$

(2) $6 = 8 * \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4}$

(3) $4{,}25 = 5 - \mu$

Nun prüfen wir die übrigen Gleichungen mit $\mu = \frac{3}{4}$ auf ihre Richtigkeit:

(1) $2 = 8 - 8 * \frac{3}{4}\ wahr$

(3) $4{,}25 = 5 - \frac{3}{4}\ wahr$

Damit liegt L_2 auf g_2.

Nun müssen wir noch den Abstand der beiden Punkte berechnen:

$L_1 = (5|3|4{,}5)$; $L_2 = (2|6|4{,}25)$

Dann folgt daraus: $d = \sqrt{(2-5)^2 + (6-3)^2 + (4{,}25-4{,}5)^2}$

$$= \sqrt{\frac{289}{16}} = \frac{17}{4} = 4{,}24, also\ 4{,}25m$$

Der Abstand der beiden Spots zueinander beträgt 4,25m.

<u>Lösung zu Teil d):</u>

Gegeben ist der höchste Punkt der Pflanze $S = (2|4|2{,}25)$ und

$L_1 = (5|3|4{,}5)$.

1. Schritt: Damit die Pflanzenspitze noch auf den Fußboden des Raumes

($x_1 - x_2$-Ebene) fällt, müssen wir zunächst einmal eine Gerade finden, die durch die beiden gegebenen Punkte verläuft, dazu rechnen wir:

$$h_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 2-5 \\ 4-3 \\ 2{,}25-4{,}5 \end{pmatrix},\ \lambda \in |R \quad \Leftrightarrow h_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2{,}25 \end{pmatrix},\ \lambda \in |R$$

2. Schritt: Da der Schatten der Pflanzenspitze in der $x_1 - x_2$-Ebene liegen soll, muss dieser Schattenpunkt folgende Koordinaten besitzen:

$E_1 = (x_1|x_2|0)$ mit $x_1, x_2 \in |R_0^+$

3. Schritt: Nun überprüfen wir, ob die Gerade h_1 die $x_1 - x_2$-Ebene in einem solchen Punkt E_1 schneidet. Dazu setzen wir den Punkt in die Geradengleichung ein und bestimmen so seine Koordinaten:

$$h_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2{,}25 \end{pmatrix}$$

Wie erhalten 3 Gleichungen:

(1) $x_1 = 5 - 3 * \lambda$

(2) $x_2 = 3 + \lambda$

(3) $0 = 4{,}5 - 2{,}25 * \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

Nun setzen wir $\lambda = 2$ in Gleichung (1) und (2) ein:

(1) $x_1 = 5 - 3 * 2 \Leftrightarrow x_1 = -1$

(2) $x_2 = 3 + 2 = 6$

Wenn die Gerade h_1 die $x_1 - x_2$-Ebene schneiden soll, dann muss der Punkt E_1 nach unserer Rechnung folgende Koordinaten haben: $E_1 = (-1|6|0)$. Da die x_1-Koordinate des Schnittpunktes negativ ist und damit nicht in unseren Definitionsbereich liegt, fällt der Schatten nicht mehr auf den Raumboden. L_1 darf somit nicht eingeschaltet werden.

Gegeben ist der höchste Punkt der Pflanze $S = (2|4|2{,}25)$ und die Lampe

$L_2 = (2|6|4{,}25)$.

1. Schritt: Damit die Pflanzenspitze noch auf den Fußboden des Raumes

($x_1 - x_2$-Ebene) fällt, müssen wir zunächst einmal eine Gerade finden, die durch die beiden gegebenen Punkte verläuft, dazu rechnen wir:

$$h_2: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4{,}25 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-6 \\ 2{,}25-4{,}25 \end{pmatrix},\ \mu \in\ |R \quad \Leftrightarrow h_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4{,}25 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mu \in\ |R$$

2. Schritt: Da der Schatten der Pflanzenspitze in der $x_1 - x_2$-Ebene liegen soll, muss dieser Schattenpunkt folgende Koordinaten besitzen:

$E_2 = (x_1|x_2|0)$ mit $x_1, x_2\ \in |R_0^+$

3. Schritt: Nun überprüfen wir, ob die Gerade h_1 die $x_1 - x_2$-Ebene in einem solchen Punkt E_1 schneidet. Dazu setzen wir den Punkt in die Geradengleichung ein und bestimmen so seine Koordinaten:

$$h_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4{,}25 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wie erhalten 3 Gleichungen:

(1) $x_1 = 2$

(2) $x_2 = 6 - 2 * \mu$

(3) $0 = 4{,}25 - 2 * \mu \Leftrightarrow \mu = 2{,}125$

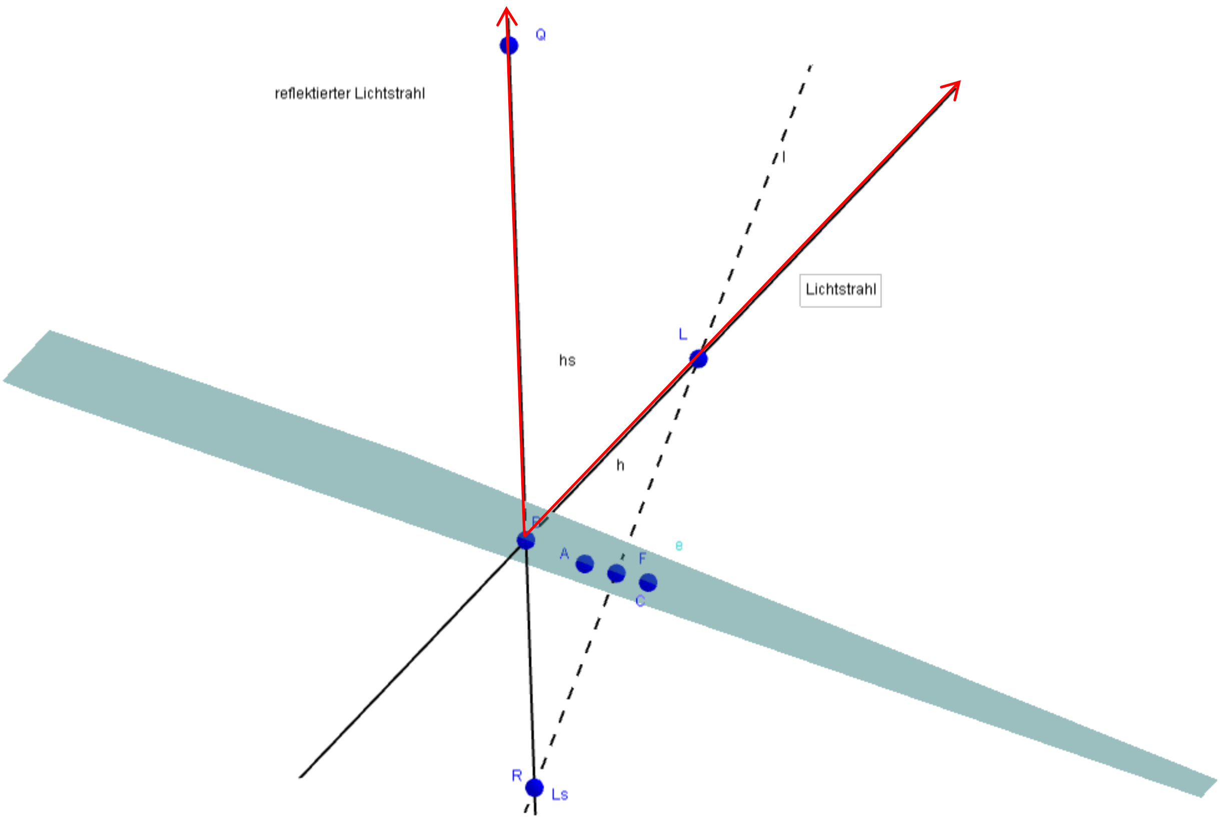
Nun setzen wir $\mu = 2{,}125$ in Gleichung (2) ein:

(2) $x_2 = 6 - 2 * 2{,}125 = 1{,}75$

Wenn die Gerade h_1 die $x_1 - x_2$-Ebene schneiden soll, dann muss der Punkt E_1 nach unserer Rechnung folgende Koordinaten haben: $E_2 = (2|1{,}75|0)$. Da die $x_1 - x_2$-Koordinaten des Schnittpunktes in unserem Definitionsbereich liegen, fällt der Schatten auf den Raumboden. L_2 darf somit eingeschaltet werden.

2.) Aufgabe:

Lösungsskizze:



Gegeben sind die Punkte $A = (4|3|0)$, $B = (2|3|1)$, $C = (6|0|1)$, $L = (8|5.5|6.5)$.

<u>Lösung zu Teil a):</u>

Zunächst stellen wir eine Ebenengleichung in allgemeiner Parameterform auf:

$$e: \vec{x}: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 2-4 \\ 3-3 \\ 1-0 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 6-4 \\ 0-3 \\ 1-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e: \vec{x}: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir formen die Ebenengleichung in Normalenform um:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow e{:}\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Wir wandeln die Ebenengleichung in die Hesse´sche Normalenform um:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad |\vec{n}| = \sqrt{61}, \qquad \vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{Hess}: \frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Nun setzen wir den Punkt $L = (8|5.5|6.5)$ in die Hesse´sche Normalenform ein, um den Abstand zu berechnen:

$$\frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{61}} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$$

Lösung zu Teil b):

Wir betrachten den Punkt $L = (8|5.5|6.5)$ und die Ebenengleichung

$$e{:}\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Die Projektion des Punktes L in die Ebene e ist der Fußpunkt F des Lotes von L auf e. Die Berechnung von Lotfußpunkt F und Spiegelpunkt L_s können wir in folgenden Schritten berechnen:

1. Schritt: Wir bestimmen eine Gleichung der Lotgeraden l. Die Lotgerade besitzt den Punkt L als Aufpunkt und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene als Richtungsvektor. Dann schreiben wir:

$$l{:}\ \vec{x}{:} \begin{pmatrix} 8 \\ 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Wir bestimmen F als Schnittpunkt der Ebene e mit der Lotgeraden. Dazu setzen wir die Lotgerade in die Ebenengleichung ein:

$$e{:}\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0 \Leftrightarrow e{:}\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = 24 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Nun setzen wir $\lambda = -1$ in die Lotgerade ein:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} + (-1) * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (5|1.5|0.5)$$

3. Schritt: Der Spiegelpunkt L_s errechnen wir mit Hilfe der Formel zur Punktspiegelung:

$$\vec{l} = 2 * \vec{f} - \vec{l} = 2 * \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt L_s hat die Koordinaten $L_s = (2|-2.5|-5.5)$.

<u>Lösung zu Teil c):</u>

Der Spiegelpunkt kennen wir bereits aus Lösung b). Da der Lichtstrahl als eine definierte Gerade h betrachtet werden kann, die durch die Punkte B (befindet sich auf der Ebene) und L verläuft, muss der reflektierte Lichtstrahl durch die Punkte L_s und B verlaufen. Dann gilt:

Lichtstrahl:

$$h: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 8-2 \\ 5{,}5-3 \\ 6{,}5-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow h: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 6 \\ 2{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} \; mit \; \lambda > 0$$

reflektierter Lichtstrahl

$$h_s: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3+2{,}5 \\ 1+5{,}5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow h_s: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}, \lambda_s > 0$$

Nun prüfen wir, ob die Punkte $Q = (2|14|14)$ und $R = (2|-2.5|-5.5)$ vom reflektierten Strahl getroffen werden, indem wir die Punkte in die reflektierte Geradengleichung einsetzen:

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$

Wir erhalten 3 Gleichungen:

(1) $2 = 2$

(2) $14 = 3 + 5{,}5 * \lambda_s \Leftrightarrow \lambda_s = 2$

(3) $14 = 1 + 6{,}5 * \lambda_s \Leftrightarrow \lambda_s = 2$

$\lambda_s > 0 \Rightarrow Q \in h_s$

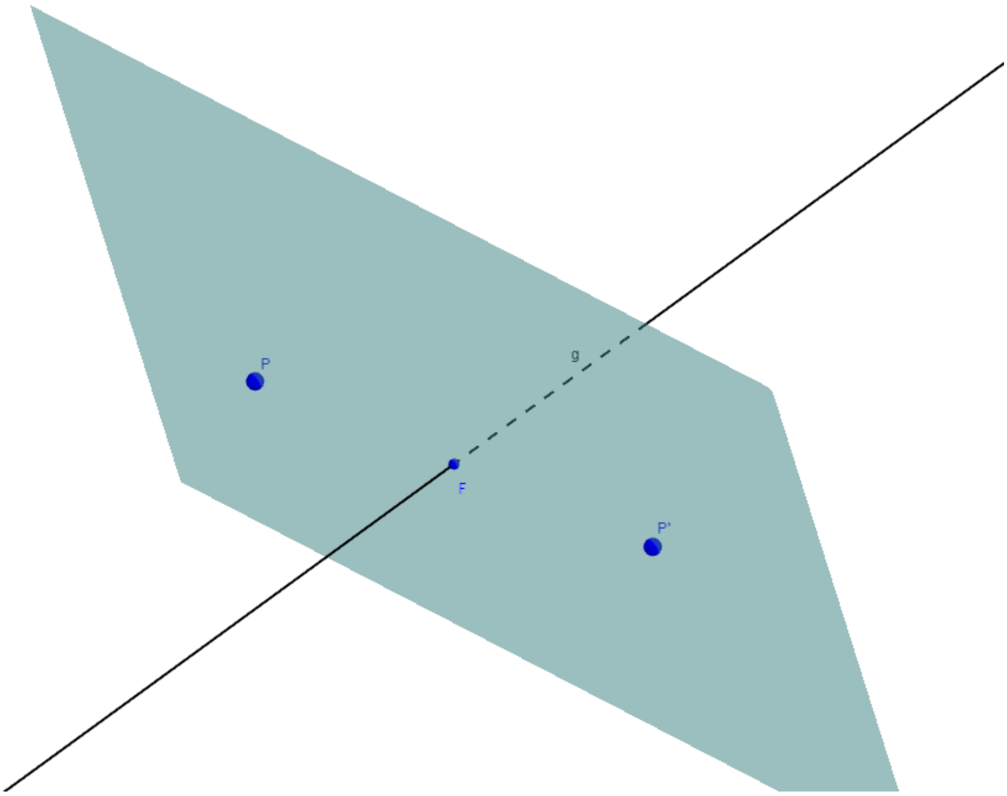
Der Punkt Q wird von dem reflektierten Strahl getroffen.

2) Wir könnten erneut das Lösungsverfahren aus 1) mit Punkt R durchführen, allerdings kann bereits aus einer geeigneten Skizze und vorherigen Lösungsschritten festgestellt werden, dass der Punkt R die gleichen Koordinaten besitzt wie der Spiegelpunkt L_s. Daraus können wir schließen, dass der Punkt R nicht auf dem reflektierten Strahl liegt.

3. Aufgabe:

Gegeben sind der Punkt $P = (-4|1|-3)$ und die Gerade $g: \vec{x}: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungsskizze:



Zunächst einmal stellen wir eine Hilfsebene e auf mit dem Punkt P als Aufpunkt und dem Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor:

$$e: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = 0 \Leftrightarrow e: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \vec{x} + 5 = 0$$

Nun berechnen wir den Fußpunkt F des Lotes von P auf g. Hierzu setzen wir unsere Geradengleichung in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right] + 5 = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{2}$$

Nun setzen wir $\mu = -\frac{1}{2}$ in die Geradengleichung ein:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) * \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\-2\\-2{,}5\end{pmatrix} \Rightarrow F = (1{,}5|-2|-2{,}5)$$

Durch Punktspiegelung des Punktes P am Zentrum F erhalten wir den Punkt P´.

$$\overrightarrow{p'} = 2 * \vec{f} - \vec{p} = 2 * \begin{pmatrix}1{,}5\\-2\\-2{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-5\\-2\end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt P´ lautet $P' = (7|-5|-2)$.

<u>4. Aufgabe:</u>

Gegeben sind die Punkte $A = (10|-1|2)$, $B = (4|1|4)$ und die Ebene

$e: x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$

Zunächst einmal bestimmen wir eine Lotgerade mit A als Aufpunkt und den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor:

$$g: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}10\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir den Lotfußpunkt F, indem wir die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix}10\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right] - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Nun setzen wir $\lambda = -2$ in die Geradengleichung ein:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix}10\\-1\\2\end{pmatrix} + (-2) * \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow F = (8|-3|4)$$

Nun berechnen wir den Spiegelpunkt A´:

$$\overrightarrow{a´} = 2 * \vec{f} - \vec{a} = 2 * \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir den reflektierten Strahl, indem wir eine Geradengleichung mit Hilfe der Punkte A´ und B aufstellen:

$$g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} 4-6 \\ 1+5 \\ 4-6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_s * \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$